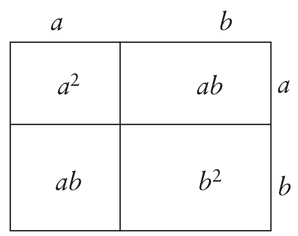
Grandeurs et mesure à l'école élémentaire

Au cycle 2, les élèves étudient la notion de longueur et sont sensibilisés à celles de masse et de temps. Ils commencent à appréhender la notion de volume par le biais de la contenance de certains récipients. Ils apprennent à mesurer longueurs, masses et durées et à repérer des dates ou des moments grâce aux calendriers et aux montres.
Au cycle 3, les activités proposées aux élèves se situent dans le prolongement de celles du cycle 2 : les élèves étudient donc les longueurs, les masses, les volumes (sous leur aspect contenance), les dates et les durées. Ils se familiarisent avec les aires. Ils approchent la notion d'angle.
Dans les deux cycles, le travail sur grandeurs et mesures est conduit en liaison avec les activités évoquées dans les rubriques « Découvrir le monde » et « Sciences expérimentales et technologie ».
Ce texte a pour objet de compléter les indications des documents d'application *Mathématiques, cycle 2* et *Mathématiques, cycle 3*, pour l'enseignement des « grandeurs et mesures » (cycle 2, page 29, et cycle 3, page 35). Il requiert une lecture préalable de ces documents.
L'attention des enseignants est également attirée sur le fait que certains mots sont utilisés en mathématiques avec un sens qui diffère de celui usuellement pratiqué, ce qui peut faire obstacle à la compréhension de la notion mathématique en jeu.

L'enseignement des grandeurs et de la mesure

L'importance de ce thème pour les apprentissages mathématiques

Les activités liées à la mesure font intervenir, en étroite imbrication, des notions géométriques et des notions numériques ; elles contribuent à une meilleure maîtrise des unes et des autres.
Par exemple, au cycle 2, la question de savoir quelle longueur de ruban reste disponible après avoir découpé, devant les élèves, un ruban de 37 cm dans un ruban de 50 cm, permet de renforcer le sens de la différence de deux nombres.
Au cycle 3, la résolution de problèmes de mesure de longueurs et d'aires aide les élèves à prendre conscience de l'insuffisance des entiers et de la nécessité d'introduire d'autres nombres : fractions, puis nombres décimaux.
Au collège les situations liées au calcul sur les longueurs, les aires et les volumes sont des supports privilégiés pour les apprentissages du calcul numérique (par exemple pour la multiplication de deux décimaux) et du calcul algébrique (distributivité de la multiplication sur l'addition, identités remarquables : par exemple $(a + b)^2$ est l'aire d'un carré de côté de longueur $(a + b)$: c'est donc la somme des aires de deux carrés et des aires de deux rectangles).



La connaissance de l'espace environnant passe souvent par le recours à des mesures : distance entre deux lieux (associée à la longueur du chemin qui joint ces deux lieux) ; superficie ou étendue (expression courante pour « aire ») d'une pièce à carreler ou à peindre ; volume d'un ingrédient en cuisine ; durée d'un film…
Les élèves doivent donc acquérir des connaissances et des compétences spécifiques relatives à différentes mesures. La construction de ces connaissances s'appuie sur un travail préalable sur les grandeurs auxquelles ces mesures sont associées.

Les grandeurs avant leur mesure

Il est possible d'associer diverses grandeurs à un objet, par exemple pour un objet cubique :
– une contenance (un volume) qui correspond à la quantité d'eau qui pourrait le remplir ;

– une masse qui dépend de la matière dont est constitué le cube ;
– les aires d'une face ou de toutes ses faces (qui correspondrait à l'aire de la surface minimale de carton nécessaire pour en faire un « patron ») ;
– des longueurs, celle d'une arête ou la longueur totale de ses arêtes (qui correspondrait à la longueur minimale de fil de fer nécessaire pour en faire un « squelette »).

L'aire totale du cube est la somme des aires des faces ; par contre la longueur totale des arêtes n'est pas la somme des périmètres des faces, comme le supposent beaucoup d'élèves. Seule une représentation fine de ce que représente chacune des grandeurs, longueur et aire, permet de comprendre cette erreur.

Le fait d'annoncer la bonne unité de mesure à la suite du nombre n'est pas suffisant pour que les élèves se représentent correctement une grandeur (par exemple pour qu'ils différencient aire et périmètre) : il est nécessaire qu'ils aient préalablement travaillé sur les propriétés de chacune de ces grandeurs (ici longueur et aire).

Les premières activités visent à construire chez les élèves le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne. Le concept s'acquiert progressivement en résolvant des problèmes de comparaison, posés à partir de situations vécues par les élèves, suivis de moments d'institutionnalisation organisés par le maître. De tels problèmes amènent notamment à classer des objets : certains, pourtant d'apparences différentes, sont équivalents selon un critère déterminé, longueur, aire… ; ainsi un crayon peut avoir la même longueur qu'un stylo, mais il existe des crayons de longueurs différentes ; il suffit de les disposer côte à côte pour le constater. Les problèmes posés peuvent donner lieu à :
– des comparaisons directes : juxtaposition, superposition pour les longueurs, les angles ou les aires ; transvasements du contenu d'un récipient dans un autre pour les contenances ; soupesage ou utilisation de la balance Roberval pour les masses ;
– des comparaisons indirectes : recours à un objet intermédiaire (longueur servant de gabarit, masse fixée servant d'étalon) ou transformation de l'un des objets pour le rendre comparable à l'autre (par exemple, déroulement d'une ligne non rectiligne) ; découpage et recomposition d'une surface pour les aires…

Les élèves sont aussi habitués progressivement à anticiper mentalement les résultats des comparaisons avant de les valider par l'expérience.

Par exemple, pour comparer les aires et les périmètres des surfaces A, B et C construites à partir de carrés et de demi-cercles :
aire (figure B) = aire (figure A)
MAIS périmètre (figure B) > périmètre (figure A)
aire (figure B) ≠ aire (figure C)
MAIS périmètre (figure B) = périmètre (figure C)

Figure A. Figure B. Figure C.

Dans un second temps, les comparaisons amènent à pointer des rapports de grandeurs : il faut savoir que les élèves ont accès à la compréhension des relations entre grandeurs (égalités, inégalités, rapports simples) avant d'être capables de mesurer ces grandeurs. Ainsi il leur est facile, sans recourir à la mesure, de dessiner un crayon deux fois ou trois fois plus long qu'un autre. Il est souvent moins « évident » pour eux que l'aire de la figure A est le double de celle de la figure C ou que les figures A et B ont la même aire : une décomposition (suivant la ligne pointillée) puis une recomposition des figures permet de s'en convaincre.

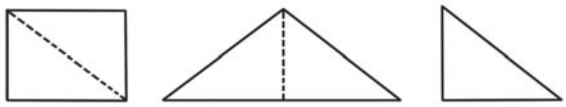


Figure A. Figure B. Figure C.

Ainsi, sans utiliser la mesure, il est possible de comparer des aires (et de vérifier que deux figures de formes différentes peuvent avoir la même aire) ou de trouver des rapports d'aires.

Le vocabulaire des grandeurs

Comme pour les autres domaines des mathématiques, l'enseignant doit exercer une certaine vigilance sur le langage utilisé pour évoquer les grandeurs. Le mot « grandeur » n'a pas à être utilisé en classe : il est remplacé par « longueur, masse, aire, etc. » selon le contexte.

Les mots du domaine des longueurs sont assez nombreux. Sans chercher à être exhaustifs, citons hauteur d'un monument, d'un arbre (par contre la hauteur du Soleil est un angle[1]) ; altitude d'un sommet, d'un avion en vol ; dénivelé d'une route ; profondeur d'une piscine, d'un placard ; taille d'une personne, tour de cou, tour de taille ; distance entre deux lieux, entre deux points ; largeur d'un fleuve, d'un rectangle ; périmètre d'un polygone ; circonférence d'un cercle… Il est important pour l'élève que tous ces mots, utilisés dans des contextes différents, se réfèrent au même concept, appelé en mathématiques « longueur ».

1. « Mouvement apparent du Soleil », in *Fiches connaissances, cycles 2 et 3*, CNDP, 2002, coll. « École », fiche 19, page 35.

Certains mots désignant des unités de longueur (mètre, décamètre, décimètre) sont aussi utilisés pour nommer un outil de mesure : mètre ruban, mètre de couturière, décamètre d'arpenteur, double-décimètre de l'élève.
Le mot « aire » est utilisé en mathématiques de préférence à celui de « surface ». Il doit être différencié de ses homonymes : l'air qu'on respire, l'air qu'on fredonne, l'aire de repos sur l'autoroute ou une aire géographique (toutes deux plutôt apparentées à une surface), l'ère (l'époque).
Dans le domaine des volumes, le terme « contenance » désigne un volume intérieur, les termes « contenance » ou « volume » peuvent être utilisés, tout en soulignant leur différence avec le volume du son (qui évoque son intensité) ou le volume posé sur l'étagère (le livre)…
À l'école primaire, le mot « masse » est considéré comme synonyme de « poids », comme dans le langage courant. Il est homographe de la masse, outil de l'ouvrier du bâtiment.
L'usage adapté du « bon mot » ne peut être exigé de la part de tous les élèves, mais l'enseignant doit veiller à utiliser correctement ce vocabulaire et engager les élèves dans des mises en relation comme, par exemple, rattacher au domaine des longueurs tous les mots qui l'évoquent.

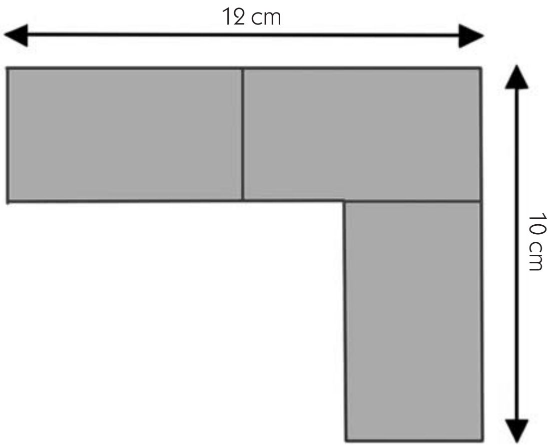
Des grandeurs à leur mesure

Il est souvent commode, pour comparer toutes les grandeurs d'un même domaine, de les comparer à une grandeur particulière, bien choisie, dite « étalon ». On dit alors que « l'étalon mesure une unité ». Il devient dès lors possible d'associer à chaque grandeur un nombre, appelé « sa mesure relativement à cette unité ».
Remplacer une grandeur par un nombre présente un grand intérêt. En effet, il est alors possible :
– de communiquer sur la grandeur des objets grâce aux nombres rapportés à une unité ;
– de fabriquer un objet dont la grandeur est donnée par un nombre rapporté à une unité ;
– de comparer des objets selon une grandeur en leur attribuant un nombre ou en utilisant des encadrements entre deux nombres, ces nombres étant rapportés à une unité.
Dans certains cas, la mesure de la grandeur est obtenue à l'aide d'un mesurage, par report de l'étalon ou par utilisation d'un instrument. Ces deux actions correspondent à une prise d'informations directe sur l'objet.
Dans d'autres cas, la mesure est le résultat d'un calcul.
Il est souhaitable que les élèves apprennent à estimer la mesure avant de procéder au mesurage, soit à l'œil, soit en ayant recours à des gestes (parcourir le gymnase pour en estimer la longueur), soit à partir de longueurs connue, entre un et deux mètres (taille d'une personne), entre 10 et 25 cm (empan de la main), entre 4 et 5 mètres (dimension d'une pièce usuelle).
L'utilisation adaptée des instruments de mesure nécessite un apprentissage. La plupart du temps, la mesure est obtenue par lecture d'une graduation (instruments de mesure de longueur, cadran d'une balance graduée, graduations d'un verre mesureur…). Il est donc particulièrement important de comprendre le fonctionnement des instruments de mesure de longueur. C'est pourquoi nous développons plus particulièrement le thème des longueurs dans la seconde partie du chapitre (page 82).
Les élèves doivent être placés dans des situations de mesurage. Ces activités sont accompagnées d'une première réflexion sur le caractère approximatif de certains résultats.
Rappelons à ce sujet ce qui est écrit dans les documents d'application des programmes de mathématiques :
« Si la réflexion sur la précision des mesures est encore difficile au cycle 2, le maître sensibilise ses élèves à la difficulté de lire exactement une mesure. Par exemple, un segment prévu par le maître comme mesurant 5 cm ne pourra pas toujours être mis en correspondance parfaite avec le 0 et le 5 de la règle graduée en centimètre[2]. »
« Une réflexion sur la précision des mesures sera menée à l'occasion de chaque activité : il ne s'agit pas d'exiger une précision exemplaire, mais au contraire de faire prendre conscience des approximations liées à la taille des objets, à la précision des instruments et à leur utilisation. Souvent, cela se traduit par un intervalle de confiance, une "erreur maximum". Par exemple, pour le mesurage d'un segment dont la longueur prévue est 4,8 cm, les longueurs de 4,7 cm, 4,8 cm et 4,9 cm sont jugées acceptables[3]. »
Les élèves doivent être confrontés à des problèmes où ils ont l'initiative de prélever des informations liées aux mesures, qui peuvent être données sous trois formes :
– sur des dessins à l'échelle 1, le prélèvement d'informations relève du mesurage. Ainsi pour déterminer le périmètre d'une surface polygonale dessinée sans indication de mesure, les élèves ont la responsabilité de prélever les longueurs nécessaires, l'enseignant veillant, en fin d'activité, à indiquer le périmètre avec un intervalle de confiance ;
– avec des dessins à une autre échelle précisée (par exemple, 1 cm représente 5 m), le mesurage seul ne suffit plus ; il faut faire intervenir des connaissances relatives à la proportionnalité ;
– des schémas cotés nécessitent d'abandonner le mesurage et d'apprendre à lire des informations

2. *Mathématiques, cycle 2*, *op. cit.*, page 30.
3. *Mathématiques, cycle 3*, *op. cit.*, page 35.

symboliques (codes d'égalité de longueurs, code d'angle droit) et textuelles.
Un travail spécifique est nécessaire pour apprendre à changer de points de vue selon le dessin proposé et à connaître certaines conventions. Il est important qu'en fin d'école primaire, les élèves ne considèrent pas qu'une mesure s'obtient uniquement à l'aide d'un mesurage effectif et qu'ils résolvent correctement le problème suivant.

Sophie a dessiné et colorié trois étiquettes rectangulaires toutes identiques sur une plaque de carton, comme le montre le dessin. La plaque est rectangulaire et a pour longueur 12 cm et pour largeur 10 cm.



a) Calcule la longueur réelle d'une étiquette. Écris tes calculs.
b) Calcule la largeur réelle d'une étiquette. Écris tes calculs.

Évaluation nationale de sixième, 2000.

Actuellement, à l'entrée en sixième, plus d'un élève sur cinq utilise son double-décimètre pour répondre, alors que, le support étant un schéma coté, la réponse s'obtient par déduction et calcul, ce qui souligne la nécessité d'un travail sur ce type de situation.

Le système métrique

Le système international (SI) d'unités est fixé par le Bureau international des poids et mesures (créé en 1875). Les unités de base du SI sont le mètre, le kilogramme et la seconde. Le litre est une unité dite d'usage courant.
Les définitions (et les symboles) des unités sont modifiés de temps à autre pour suivre l'évolution des techniques de mesure. Plus de renseignements sont disponibles sur www1.bipm.org/fr/bipm/metrology
Il est important que les élèves soient familiarisés avec la signification des préfixes les plus usités accolés à l'unité de référence :

kilo $\leftrightarrow$ 1 000 ; hecto $\leftrightarrow$ 100 ; déca $\leftrightarrow$ 10 ; déci $\leftrightarrow \frac{1}{10}$; centi $\leftrightarrow \frac{1}{100}$; milli $\leftrightarrow \frac{1}{1000}$,

et sachent s'y référer pour des conversions concernant les longueurs référencées au mètre, les masses référencées au gramme et les contenances référencées au litre.
Attention, pour les aires référencées au mètre carré (et les volumes référencés au mètre cube), la signification des préfixes n'est plus celle qui précède. Deux unités d'aire « voisines » (km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2) ne sont plus dans un rapport 10 comme les unités de longueurs voisines (km, hm, dam, m, dm, cm, mm), mais dans un rapport 100. Cela est dû à la construction du système métrique : les unités d'aires du système international sont construites comme produits de deux longueurs. Ainsi :
1 décamètre^2 = (1 décamètre)^2 = (10 mètres)^2 = 10^2 mètres^2 = 100 mètres^2.
La puissance deux (au carré) affecte aussi le préfixe déca qui ne signifie plus 10, mais 10^2.
En revanche, pour des unités d'aire telles que are, hectare, centiare (dont la connaissance n'est pas exigible à l'école primaire, même si elles peuvent être utilisées), les préfixes conservent la signification qu'ils ont pour les unités de longueur. Ainsi :
1 hectare = 100 ares et 1 centiare = $\frac{1}{100}$ are.
Rappelons que 1 are = 100 m^2.
Les exercices de transformation de mesures par changement d'unités doivent rester raisonnables et reposer sur la mobilisation systématique de connaissances telles que 1 km = 1 000 m ; 1 m = 100 cm. Des questions du type « Combien y a-t-il de mm dans 5 km ? » (s'il s'agit par exemple de compter des pas de fourmis) ne doivent pas faire l'objet d'exercices systématiques : si elles sont posées, les élèves peuvent y répondre à l'aide de procédures personnelles.
Le tableau dit « de conversion des unités » ne doit pas être proposé avant qu'un certain nombre d'exercices de transformation de mesures ait permis aux élèves de prendre conscience des régularités dues à la compatibilité du système métrique avec l'écriture décimale numérique.

Le calcul sur les grandeurs

Aucune virtuosité sur les conversions d'unités n'est demandée. Au départ, les résultats des mesures peuvent être exprimés avec des expressions « complexes », c'est-à-dire utilisant plusieurs unités, par exemple 1 m 7 cm (ou 1 m et 7 cm). Ce choix est usuel dans les expressions liées à la monnaie, par exemple : 3 euros 20 centimes (ou 3 euros et 20 centimes) et plus encore aux durées : 2 h 50 min.
À la fin du cycle 3, lorsque l'utilisation des nombres décimaux se généralise, un travail est conduit sur l'égalité d'expressions comme 1 m 7 cm et 1,07 m.
Il est aussi intéressant de travailler avec les élèves sur des égalités comme 2 h 30 min = 2,5 h ou 2 h 15 min = 2,25 h : en effet, le passage de l'écriture

« complexe » à l'écriture décimale (et vice versa) résulte d'un apprentissage qui sera poursuivi au collège.

Donner comme mesure 1,5 pour la longueur d'un segment n'a pas de sens : il peut s'agir de 1,5 cm ou de 1,5 dm ou encore d'une autre longueur. Une longueur n'est parfaitement connue et définie que si on précise un nombre et une unité de longueur : par exemple 23 cm ou 230 mm ou encore 2,3 dm.

Il est donc légitime et correct d'écrire des égalités telles que :

1 m = 100 cm, 1 km = 1000 m.

1 h = 60 min.

23 cm = 230 mm, 23 cm = 2,3 dm, 23 cm = 230 cm = 2,3 dm.

Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :

3 cm + 15 mm = 30 mm + 15 mm = 45 mm = 4,5 cm.

3 kg + 500 g = 3,5 kg = 3500 g.

4×37 cm = 1,48 m.

3 h 45 min + 1 h 28 min = 4 h 73 min = 5 h 13 min.

3×15 min = 45 min.

Plusieurs unités de grandeur peuvent donc coexister dans un calcul, qui n'est pas alors un calcul portant sur des nombres, mais un calcul portant sur des grandeurs.

Plus tard, l'élève maniera des égalités du type :

– pour l'aire de rectangles,

$4 \text{ m} \times 7 \text{ m} = 28 \text{ m}^2$

$8 \text{ m} \times 50 \text{ cm} = 8 \text{ m} \times 0{,}50 \text{ m} = 4 \text{ m}^2$;

– pour le périmètre d'un carré de 7 cm de côté,

4×7 cm = 28 cm ;

– pour une vitesse,

$$\frac{156 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 78 \text{ km/h}.$$

Longueurs, aires, dates et durées

Une insistance particulière sur les longueurs (cycles 2 et 3)

Longueurs

Des problèmes sur les longueurs peuvent prendre appui sur :

– des comparaisons de longueurs « corporelles » (tour de cou, tour de tête, taille…) qui se résolvent par comparaison directe ou utilisation d'une ficelle avant utilisation d'une toise, d'un mètre ruban pour en déterminer la mesure ;

– des comparaisons de longueurs de l'environnement, dont les supports ne sont pas nécessairement rectilignes : quel est l'arbre de la cour de plus grand tour (périmètre) ? Quel est le chemin le plus court entre ces deux endroits ?

– des comparaisons de longueurs de lignes brisées ou de lignes courbes dessinées sur une feuille : dans un premier temps, une bande de papier ou une ficelle suffisent pour conclure, dans d'autres cas le recours à la mesure est nécessaire.

Plus courte distance

Des problèmes de recherche de la plus courte distance entre deux lieux ou deux objets sont posés dès l'école primaire, même si une étude mathématique plus systématique relève du collège. Ils permettent en effet une appréhension spatiale de notions géométriques :

– si on recherche la plus courte distance entre deux lieux dans la cour de récréation ou entre deux points sur la feuille de papier, c'est le parcours (ou le tracé) rectiligne qui est la réponse au problème posé ;

– si on recherche la plus courte distance entre l'arbre et le mur dans la cour de récréation ou entre un point et une droite sur la feuille de papier, c'est le parcours (ou le tracé) rectiligne perpendiculaire qui est la réponse au problème posé.

De même, la recherche et le marquage de positions toutes à la même distance d'un mur ou d'une clôture rectiligne amènent au tracé « d'une droite parallèle » au mur ou à la clôture.

Périmètre

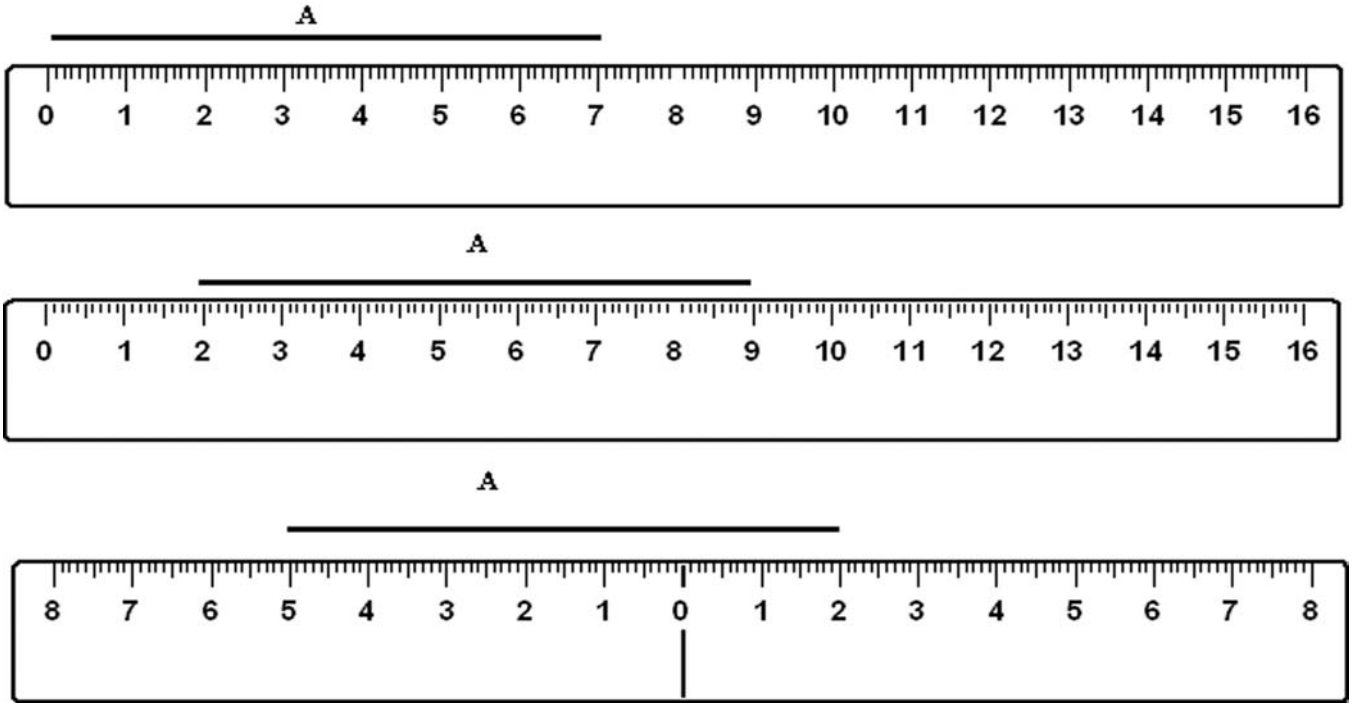
Le périmètre est une longueur particulière : dans un premier temps, les élèves doivent pouvoir comparer des périmètres, sans recourir à la mesure.

La mesure du périmètre d'un polygone ne nécessite pas de recours à une formule : c'est le sens du mot « périmètre » qui devrait permettre à l'élève de déduire la réponse à partir d'informations données ou prélevées sur l'objet étudié. La seule formule à mémoriser sera celle du périmètre du disque, apprise en sixième. Ainsi, plutôt que de donner la longueur du côté du carré dont il est demandé de trouver le périmètre, il est intéressant de laisser l'élève mesurer lui-même la longueur adaptée pour obtenir le résultat. Plusieurs stratégies sont possibles : mesurer chacun des côtés (avec l'éventualité de trouver des résultats différents) et additionner ; mesurer chacun des côtés en régulant les différences de résultats des mesures et additionner ; mesurer un seul côté et multiplier par quatre. La discussion sur les stratégies amène à revoir les propriétés du carré et à mettre en évidence celles qui permettent de minimiser les actions de mesurage. Le même travail peut se faire pour la longueur d'une ligne brisée dont on sait que plusieurs segments sont de même longueur ou pour le périmètre d'un rectangle.

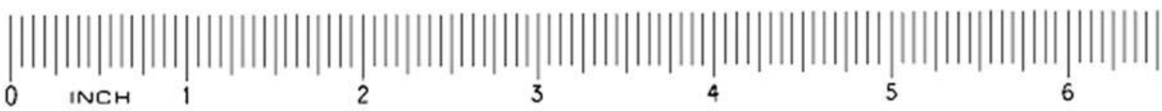
Graduation

La fabrication d'un instrument de mesure de longueurs soulève la question de sa graduation.

Pour graduer une bande de papier, il faut déterminer une origine, lui attribuer le nombre 0, reporter régulièrement une même longueur, appelée unité. Chaque report est en général matérialisé par un trait, chaque trait est affecté d'un nombre entier.
Mesurer une longueur avec la bande graduée revient à déterminer un écart, en nombre d'unités, entre les deux traits correspondants aux extrémités du segment de longueur cherchée. Pour une lecture rapide de la mesure, le trait de départ à privilégier est l'origine de la graduation.
Il est donc opportun de proposer aux élèves de :
– fabriquer des instruments de mesure de longueur : par exemple, au cycle 2 une toise graduée en décimètres ;
– trouver des mesures à l'aide d'instruments différents : par exemple des doubles-décimètres classiques, mais aussi des doubles-décimètres cassés (sans zéro apparent), des règles graduées avec zéro central ; ces activités permettent notamment de relier la donnée de la mesure à la bonne « lecture » des graduations et à la connaissance de l'unité de référence choisie par le constructeur.
Des situations de communication de mesure entre élèves (voir l'exemple de séquence, page 86), suivies d'une comparaison des instruments, sont particulièrement propices à cette prise de conscience.
Ainsi dans l'exemple qui suit, le segment A est repéré « de 0 à 7 » ou « de 2 à 9 » sur la règle ordinaire, et de « 5 à 2 » sur la règle symétrique. Mais la longueur du segment A est toujours 7 unités, écart entre les deux traits repères.



Il peut aussi être intéressant de mettre en concurrence dans la classe des bandes graduées en centimètres et d'autres en pouces pour souligner la nécessité de s'entendre sur l'unité utilisée pour communiquer.

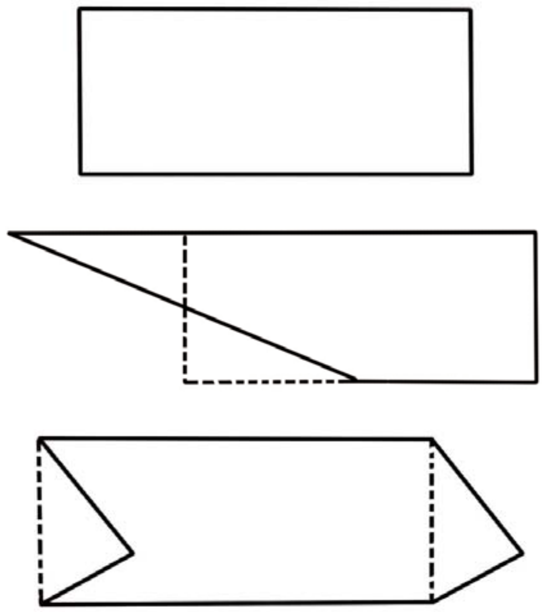


Une proposition de suite d'activités pour le cycle 3, visant le passage d'une approche de la longueur à sa mesure, est décrite à la page 86 à titre d'exemple. Elle met en évidence la richesse potentielle d'activités de communication pour faire prendre conscience aux élèves la nécessité d'adopter des conventions de mesure et l'utilité de disposer d'instruments adéquats.

Les aires

Les aires sont essentiellement étudiées au cycle 3. La progression, qui se poursuit au collège, suit la même dynamique que celle utilisée pour les longueurs : d'abord des travaux de comparaison, puis un passage à la mesure par le choix d'un étalon, suivi d'une familiarisation avec certaines unités du système international.

Un premier temps doit être consacré à des activités de comparaison d'aires. Il s'agit de comparer des surfaces planes selon leur étendue. Ces surfaces peuvent être soit dessinées sur une feuille de papier uni, avec la possibilité de les découper, soit matérialisées par des objets peu épais (pièces de Tangram, par exemple). Il s'agit :
– des surfaces d'aires très différentes ; la superposition (mentale ou effective) permet de constater que « l'une est beaucoup plus étendue que l'autre » ;
– des surfaces d'aires égales, l'égalité pouvant être vérifiée par superposition directe ;
– des surfaces d'aires égales, mais qui ne sont pas superposables directement : des découpages et des réagencements (effectifs ou mentaux) sont alors nécessaires pour constater l'égalité des aires.
Plusieurs exemples ont déjà été utilisés dans les pages précédentes ; en voici d'autres :

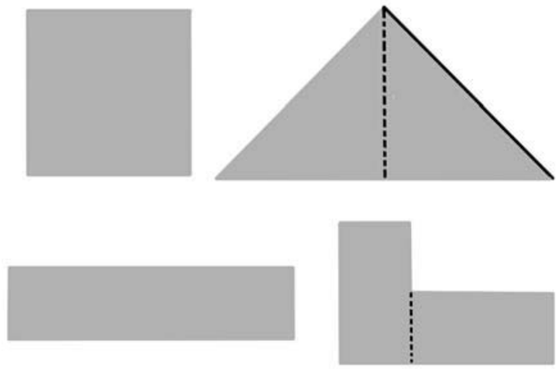


La variété des procédures qui permettent de comparer des surfaces « quant à leur étendue » aide la construction chez l'élève de la relation « avoir même aire ».
Un réinvestissement intéressant consiste à demander aux élèves de fabriquer, sur papier uni ou par découpage et juxtaposition avec du ruban adhésif, des surfaces de même aire qu'une surface de référence, mais ayant des formes différentes, puis d'expliquer comment ils ont trouvé et pourquoi ils sont sûrs de la validité de leurs propositions. Le travail peut se poursuivre avec des surfaces d'aire double ou triple.
Un second temps peut être consacré à la comparaison d'aires de surfaces dessinées sur papier quadrillé. Pour cette activité il est bon de se limiter à des contours suivant les lignes ou les diagonales du quadrillage. Les procédures précédentes restent valables, enrichies par la possibilité de compter le nombre de carreaux « occupés » par les surfaces et de comparer les mesures en « carreaux ». Cette procédure devient la plus efficace s'il s'agit de transmettre par écrit, sans dessin, des informations permettant à un autre élève de fabriquer, sur quadrillage, une surface de même aire (mais pas nécessairement de même forme) qu'une surface de référence donnée sur un quadrillage identique. L'élève qui déclare la surface X fait 17 carreaux et demi a basculé du côté de la mesure. La conclusion de l'enseignant peut être la suivante : « Si je décide que l'aire d'un carreau est 1 unité d'aire, alors je peux dire : “La surface X mesure 17 unités et demi [ou 17,5 unités ou $(17 + \frac{1}{2})$ unités].” »

Ce peut être aussi l'occasion, notamment pour les surfaces dont les contours suivent exactement les lignes du quadrillage, de se rendre compte que :
– deux surfaces de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre ;
– deux surfaces de même périmètre n'ont pas nécessairement la même aire ;
– on peut fabriquer des surfaces de même aire qu'un rectangle fixé R et de périmètres plus grands ou plus petits que celui de R ;
– on peut fabriquer des surfaces de même périmètre qu'un rectangle S et d'aires plus grandes ou plus petites que celle de R.
En revanche, la détermination systématique d'un encadrement pour l'aire d'une surface dont les bords ne sont pas rectilignes relève du collège (notamment à l'aide de deux surfaces polygonales, l'une intérieure à la surface de départ, l'autre extérieure).

N.B. – La mesure du périmètre s'exprime en unités de longueur, cette unité de longueur étant par exemple la longueur d'un côté de carreau du quadrillage. La mesure de l'aire s'exprime en unités d'aire, cette unité d'aire étant par exemple l'aire d'un carreau du quadrillage. Un abus de langage usuel, mais à éviter, consiste à décrire longueur et aire avec la même unité : le carreau.

Des « formes différentes » pour le décimètre carré : les unités les plus usuelles pour l'écolier sont le centimètre carré et le décimètre carré. Pour aider les élèves à distinguer surfaces et aires, les surfaces associées à ces unités (notamment) au décimètre carré doivent être diverses. S'il est certes naturel de définir le décimètre carré comme l'aire d'un carré d'un décimètre de côté, il est souhaitable d'inviter les élèves à construire d'autres surfaces de formes différentes dont ils sont sûrs que l'aire est aussi égale à un décimètre carré.
Voici une liste non exhaustive de surfaces d'aires égales obtenues par « décomposition et recomposition sans perte d'aire » d'un carré.



Contrairement aux longueurs, masses et volumes, il n'existe pas d'instrument usuel de mesure directe des aires. La mesure d'aires résulte très souvent d'un calcul, réalisé à partir d'une formule. La connaissance de l'aire du rectangle (seule exigible en fin d'école primaire) est importante car elle permet d'en déduire l'aire de nombreuses autres surfaces : triangle rectangle, triangle, losange, parallélogramme, notamment par transformation de la surface à étudier en un rectangle (ou un demi-rectangle) de même aire. Mais ceci est un apprentissage qui relève du collège.

Les dates et les durées

Deux catégories de questions sont liées à la notion de temps :
– se repérer dans le temps ; d'abord par rapport à des événements familiers (avant le repas, après la sieste, avant le mercredi), ensuite par rapport à des repères conventionnels et en utilisant les nombres. Les dates du calendrier sont organisées grâce à un repère linéaire avec une origine culturellement fixée (le début de l'ère chrétienne, l'hégire…). L'heure (légale) est une « date à l'échelle de la journée solaire » ;
– évaluer des durées, c'est-à-dire mesurer un intervalle de temps (intervalle entre deux dates ou deux moments) ; ce qui nécessite le choix d'une unité. Les durées peuvent s'additionner et se soustraire, au même titre que les longueurs, les aires, les volumes. Les durées, contrairement aux dates et heures, sont identiques partout sur la Terre.

Lecture de l'heure

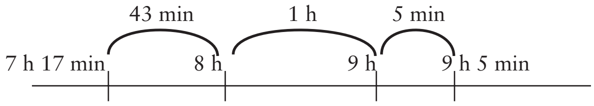
Deux types d'affichage sont disponibles pour lire l'heure ; l'affichage analogique donné par les positions de deux aiguilles sur un disque (montre à aiguilles, horloge traditionnelle) et l'affichage digital donné par deux nombres à deux chiffres séparés par deux points (montre digitale).
L'affichage digital ne présente pas de difficulté particulière de lecture, pour peu qu'on ait compris la nécessité de lire deux nombres juxtaposés. Mais cette lecture seule ne permet pas de travailler le fait qu'une heure est égale à soixante minutes. À l'école, la lecture analogique sur montre à aiguilles et pendule doit donc être privilégiée.
Une pendule est un repère complexe pour de jeunes enfants : c'est la superposition de deux cadrans gradués différemment, celui des heures et celui des minutes. Le cadran des heures est gradué régulièrement de une heure en une heure, de un à douze, le douze correspondant aussi au zéro. Le cadran des minutes est gradué régulièrement de cinq minutes en cinq minutes, de cinq à soixante. Ces nombres-là ne figurent pas nécessairement sur le cadran de la pendule, il faut les inférer à partir des graduations des heures. C'est pourquoi l'apprentissage de la lecture de l'heure s'étale du cycle 2 au cycle 3. Une condition nécessaire est la présence dans la classe d'une pendule analogique en état de fonctionnement, l'idéal au cycle 2 serait qu'elle soit graduée de un à douze.
Au cycle 2, il est intéressant :
– de travailler sur un cadran des heures (avec une seule aiguille) et de sensibiliser à la notion d'intervalles : il est pile trois heures (une seule position de la petite aiguille) ; il est pile quatre heures (une seule position de la petite aiguille) ; il est entre trois heures et quatre heures (de nombreuses positions de la petite aiguille) avec des précisions du type il est plus près de trois heures ou il est plus près de quatre heures (pour habituer au sens conventionnel de rotation des aiguilles) ;
– de faire prendre conscience, après de multiples observations, de la simultanéité suivante : quand et pour que la petite aiguille passe de trois exactement à quatre exactement, la grande aiguille doit faire un tour complet (parte de douze et revienne à douze) : un tour complet de la grande aiguille dure une heure.
Au cycle 3, ces apprentissages sont poursuivis. Progressivement est abordée la lecture de positions particulières intermédiaires : trois heures un quart, trois heures et demi, trois heures trois quarts (aussi lu quatre heures moins le quart). À cette occasion il est profitable d'utiliser le cadran des minutes et de faire colorier la zone balayée par la grande aiguille de douze à trois (un quart d'heure) ; de douze à six (une demi-heure) ou de douze à neuf (trois quarts d'heure). C'est aussi l'occasion de les familiariser avec des angles qui sont des fractions simples de tour (et des durées fractions simples d'heure).
Le cadran des minutes peut aussi être un support à l'énoncé des multiples de cinq, depuis cinq (aiguille sur le un) jusqu'à soixante (aiguille sur le douze). C'est ainsi que les élèves parviennent à comprendre qu'un tour complet de la grande aiguille dure soixante minutes ou une heure.
Au cycle 3, en liaison avec l'astronomie, les élèves sont amenés à comprendre que, suite à la rotation de la Terre autour du Soleil, l'heure (légale) n'est pas identique partout sur la Terre [4].

4. *Enseigner les sciences à l'école, cycle 3*, CNDP, 2002, coll. « École », pages 29-46.

Calcul sur les durées

Une bonne compréhension de l'affichage analogique permet aussi de calculer de façon réfléchie sur les durées. Une « vraie » horloge analogique permet d'illustrer le calcul de sommes ou de différences de durées par déplacement effectif des aiguilles et décompte des minutes. Les techniques automatisées (calcul posé en colonne) pour les additions ou les soustractions de durées n'ont pas à être étudiées. Un calcul réfléchi est aussi rapide et souvent plus efficace. Ainsi la somme de 4 h 57 min et 2 h 38 min est égale à 6 h 95 min qui devient 7 h 35 min : le premier calcul n'est qu'une simple addition, la seconde transformation résulte de la connaissance de l'égalité 1 h = 60 min.
Comme dans d'autres domaines, les différences à calculer peuvent correspondre à des problèmes variés, par exemple :

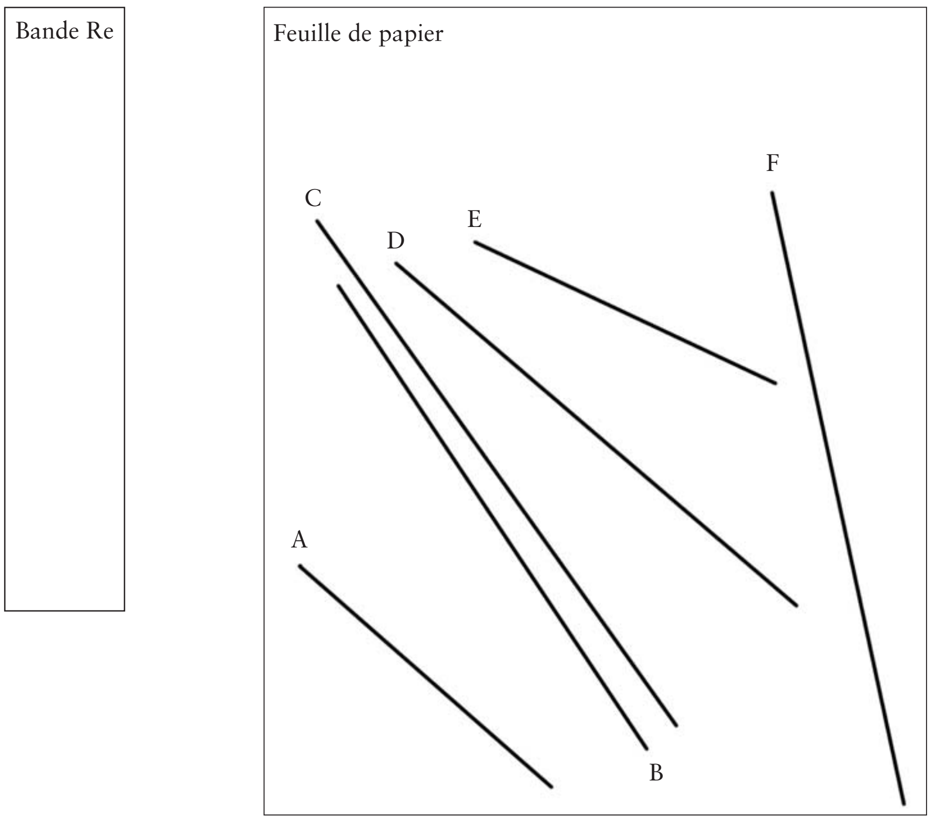
– déterminer une durée (écart entre deux dates ou entre deux « heures ») : combien de temps dure le trajet d'un train qui part à 7 h 17 et arrive à 9 h 5 ? (il est à noter que la mention des minutes et du zéro intermédiaire est souvent omise) ;
– quantifier la comparaison de deux durées : quelle différence de temps de parcours entre deux trains si le premier met 7 h 17 min et le second 9 h 5 min ?
Dans les deux cas, des stratégies diverses de calcul réfléchi amènent au résultat, certaines étant plus « naturelles », compte tenu du problème posé :
– l'utilisation d'une ligne numérique dessinée (ou virtuelle) suivie du calcul des écarts avec des appuis « faciles », par exemple pour le premier problème :



soit 1 h 48 min

Un exemple de séquence sur les longueurs (fin de cycle 2, début de cycle 3)

La séquence proposée est conçue pour que les questions posées par l'enseignant puissent être insérées dans un dispositif qui amène l'élève à s'engager dans l'activité et lui permette de pouvoir contrôler les résultats de son action.
Matériel à préparer, pour chaque élève (ou groupe de deux, voire trois élèves) :
– une bande de papier référence appelée Re (pour chaque séance), qu'il marque à son nom personnel ou de groupe ; tous les élèves n'ont pas des bandes Re de même longueur, il en existe par exemple quatre de longueurs différentes dans la classe (en accord avec les quatre longueurs de la feuille ci-dessous) ;
– une longue bande L, par exemple en carton, qu'il est interdit de découper ;
– une copie de la feuille (ci-dessous) sur laquelle sont dessinés plusieurs segments marqués de A à F.



Séance 1

La tâche des élèves est de trouver un moyen de savoir quels segments de la feuille ont la même longueur que Re, sans disposer simultanément de la feuille et de la bande Re.

La stratégie attendue est qu'ils pensent à reporter la longueur de Re sur la bande L pour en conserver la mémoire.

– Dans le premier temps les élèves disposent de Re et de la longue bande L (qu'il est interdit de découper) ; la feuille (avec les segments A à F) n'est pas disponible. La consigne pourrait être la suivante : « Tout à l'heure je vous donnerai une feuille [le maître la montre] sur laquelle vous devrez retrouver les segments de même longueur que votre bande Re. Attention je ne vous donnerai la feuille que si vous me rendez Re. Réfléchissez à un moyen pour réussir. Vous pouvez écrire sur la bande L, mais vous ne pouvez pas la découper. »

Les procédés utilisés pour la réussite sont souvent le marquage sur la bande L des extrémités de Re soit au bord, soit au centre de la bande L.

– Dans un second temps, le maître reprend Re (marqué au nom de l'élève ou du groupe) et donne la feuille (avec les segments A à F). La consigne est : « Cherchez quels segments de la feuille ont même longueur que votre bande Re. »

– Dans le troisième temps, Re et la feuille sont simultanément disponibles pour que les élèves vérifient leur résultat par superposition directe.

– Le quatrième temps est consacré à une mise en commun puis à une synthèse.

Le maître conclut avec les élèves : « Pour comparer deux longueurs, je peux reporter l'une sur l'autre à l'aide d'une bande de papier. »

– Un cinquième temps est prévu pour un réinvestissement et un entraînement, par exemple avec des exercices individuels de comparaison de longueurs de segments et de reports de longueurs d'un recto au verso d'une feuille.

Le compas peut alors être proposé comme un instrument remplaçant la bande L : le groupe de mots « ou à l'aide d'un compas » est alors ajouté dans le cahier au résumé ci-dessus.

Séance 2

Matériel à préparer par élève (ou groupe de deux) : une bande courte C, la même pour tous ; une nouvelle bande Re, telle que chaque bande Re mesure toujours un nombre entier de fois la longueur de C ; une demi-feuille blanche.

La tâche des élèves, émetteurs dans un premier temps, est d'écrire un message permettant à un groupe récepteur du message de dessiner un segment de même longueur que la bande Re de l'émetteur. Les élèves (ou groupes de deux) sont associés en équipes de deux élèves (ou deux groupes) de façon à ce que, lors de l'échange des messages, l'élève (ou le groupe) donne son message à l'élève (ou au groupe) dont il reçoit le message : ainsi les confrontations se feront par équipes (de deux ou de quatre élèves selon les modalités de départ).

L'apprentissage visé est l'utilisation de la bande C comme étalon pour décrire la longueur de la bande Re, donc le report d'un étalon pour indiquer une longueur et l'introduction de la mesure.

Cette situation de communication écrite entre élèves consiste :

– dans un premier temps, à écrire un message sans dessin avec du texte ;

– dans un second temps, après échange des messages entre groupes n'ayant pas la même bande Re, à dessiner le segment correspondant au message reçu ;

– dans un troisième temps, à confronter, par équipe, les deux segments dessinés aux deux bandes originales ;

– dans un quatrième temps, l'enseignant recense les messages écrits, fait discuter de leur efficacité, conclut par l'intérêt d'écritures du type : Re = 3C ou Re mesure comme 3C ;

– un cinquième temps, pour le réinvestissement, est consacré au mesurage de longueurs données et au traçage de segments de longueurs fixées de type 4C ; 7C ; entre 4C et 5C…

Séance 3

Matériel à préparer par élève (ou groupe de deux) : une bande courte C (la même pour tous) ; une bande Re telle que Re mesure toujours un nombre entier de fois C ; une bande graduée avec l'unité de longueur C.

Les élèves (ou groupes de deux) sont associés par deux, en équipes.

Un scénario du même type que celui de la séance 2 est mis en place, mais l'enseignant annonce qu'en plus le temps donné pour l'émission du message sera très court. Certains élèves réinvestiront la méthode du report de l'étalon C (mais cette méthode peut être longue surtout si Re mesure plus de 6C), d'autres utiliseront la bande graduée qui permet en une fois de trouver la longueur, à condition de bien la juxtaposer à Re et de déduire la mesure de la longueur.

L'apprentissage visé ici est le renforcement du report d'unité, mais aussi le « repérage » de la longueur sur un instrument gradué.

Séances suivantes : quelques idées

Il s'agit de reprendre le principe de la séance 3 en variant les instruments disponibles.

La tâche des élèves est de passer une commande écrite pour fabriquer un ou des rubans de même longueur qu'une ou des bandes de référence. C'est le maître qui délivre le ruban commandé.
Matériel à préparer par élève : une bande Re ; une demi-feuille pour la commande, des « instruments de mesure » différents à choisir par l'enseignant. Par exemple :
– instruments a : une bande unité 1 cm et une bande graduée en cm ;
– instruments b : une bande graduée en cm et un double-décimètre ;
– instruments c : un double-décimètre et une bande graduée en unités de 1,5 cm.
L'apprentissage visé est l'utilisation de la règle usuelle pour connaître une mesure et la nécessité d'expliciter soit l'instrument utilisé soit l'unité de longueur.
Les instruments autorisés influent sur l'efficacité des stratégies.