primaire ou, plus tard, aux calculs sur les nombres relatifs ou au calcul algébrique ; pour l'essentiel, les compétences des élèves se construisent dans un domaine numérique où domine le calcul mental ;
– le calcul réfléchi nécessite l'élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves (d'où l'expression de « calcul raisonné ») ;
– le calcul mental apporte souvent une aide à la résolution de problèmes, en permettant de ramener un problème à un champ numérique dans lequel les opérations deviennent plus familières : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d'avoir une intuition d'un mode de traitement possible.

Points d'appui pour la mémorisation

Certains élèves mémorisent facilement les tables d'addition ou de multiplication et les résultats indispensables à une bonne sûreté en calcul. D'autres ne parviennent pas à une mémorisation satisfaisante, malgré un entraînement répété. En effet, s'il est indispensable, l'entraînement n'est pas le seul ressort de la mémorisation. Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l'autre facette, tout aussi indispensable, de l'aide à la mémorisation.

Importance de la représentation des nombres

Les représentations des nombres sont intériorisées en prenant appui sur des représentations imagées ou symboliques. Dans les premières, on trouve les constellations (dés, dominos, jeu de cartes) ou les figurations à l'aide des doigts. Les secondes sont liées aux codages issus des systèmes de numération, chiffrée ou verbale. Il est donc important, dans les premiers apprentissages des nombres, de consolider les images mentales des « petits nombres », à partir de leurs représentations sous forme de constellations. De même, les nombres compris entre cinq et dix doivent être mis en relation avec leurs décompositions par rapport à cinq (la capacité à afficher instantanément un nombre inférieur à dix avec leurs dix doigts est pour cela une aide précieuse) ou avec leurs compléments à dix.
Ces représentations figuratives ou symboliques ne concernent pas seulement chaque nombre séparément, mais impliquent aussi des relations entre les nombres entiers dont l'ensemble est principalement structuré par deux rythmes. Le premier est la succession qui organise la suite verbale des noms de nombres :

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix	onze

C'est une suite de mots (comptine) totalement ordonnée qui débute par un et dont chaque mot « appelle » le suivant. Plus loin, à partir de vingt et avec des ruptures entre soixante et cent, ce rythme se trouve davantage en accord avec celui de la numération chiffrée (en base dix).
Le second est créé par la numération chiffrée en base dix :

1 2 3 4 5 10 15 20 25

Elle est rythmée par les dizaines et les centaines : répétition périodique du chiffre des unités à l'intérieur d'une dizaine, répétition des dizaines à l'intérieur de centaines. C'est la raison pour laquelle les opérateurs simples sont + 1, + 10, – 1, – 10.
La mémorisation des résultats des tables d'addition et de multiplication est sans doute favorisée par une bonne maîtrise de ces deux rythmes. Pour l'addition, une première étape est marquée par la reconnaissance du fait qu'ajouter un revient à dire le nombre suivant. Pour la multiplication, on connaît l'importance de la capacité à compter de cinq en cinq, de huit en huit…
Les délais de réponses enregistrés auprès d'élèves en phase d'apprentissage montrent que les résultats additifs simples sont d'abord reconstruits (avant d'être produits instantanément), en utilisant progressivement différents points d'appui que l'enseignant doit aider à mettre en place :
– utilisation de la suite numérique, par surcomptage ;
– appui sur les doubles connus (5 + 4, c'est 1 de plus que 4 + 4) ;
– utilisation de la commutativité de l'addition (2 + 9 c'est comme 9 + 2) ;
– utilisation du passage par la dizaine (pour calculer 8 + 5, on « complète à dix », on ajoute d'abord deux à huit puis trois à dix – ce qui suppose de connaître les compléments à dix et les décompositions additives des nombres inférieurs à dix).
L'objectif est bien que, au début du cycle 3, les élèves soient capables de fournir instantanément tous les résultats des tables d'addition, ainsi que les différences et les compléments associés. Ajoutons que la mémorisation fonctionne essentiellement sur un format verbal (acoustique). Ainsi, parmi les résultats symétriques (comme 7 + 5 et 5 + 7), l'un est toujours plus disponible que l'autre. Une autre caractéristique importante réside dans le rôle joué par les doubles : ils sont toujours rappelés de façon plus sûre et plus rapide que les autres résultats, ce qui permet des stratégies efficaces de calcul.
Pour les résultats multiplicatifs, la reconstruction est plus difficile et il faut viser, avant la fin du cycle 3, une mémorisation totale des produits des tables et leur utilisation pour répondre à des questions du type : « Combien de fois 7 dans 56 ? », « 56 divisé par 7 ? » ou « Décomposer 56 sous forme de

produits de deux nombres inférieurs à 10 ». Les points d'appui pour la construction des résultats pendant la phase d'apprentissage sont en partie différents de ceux relatifs au répertoire additif. L'élève peut prendre appui :
– sur les résultats rapidement connus des tables de deux et de cinq ;
– sur le comptage de *n* en *n* pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé ;
– sur la connaissance des carrés, souvent bien maîtrisés ;
– sur la commutativité de la multiplication ;
– sur le fait que multiplier par quatre, c'est doubler deux fois ou que multiplier par six revient à tripler, puis doubler ;
– sur des particularités et des régularités repérées dans la table de Pythagore, par exemple le fait de multiplier un nombre par neuf revient à prendre le prédécesseur de ce nombre comme chiffre des dizaines et le complément à neuf de ce dernier comme chiffre des unités ($6 \times 9 = 54$; 5 c'est $6 - 1$ et $5 + 4 = 9$).

Conditions de la mémorisation

Mémoriser les tables est le résultat d'un très long processus. Commencée au début du cycle 2, la mémorisation des tables d'addition n'est souvent véritablement accomplie qu'au cours de la première année du cycle 3. Amorcée en fin de cycle 2, celle des tables de multiplication n'est pas encore achevée pour tous les élèves en fin de cycle 3 (il faut cependant en viser la maîtrise à la fin de ce cycle). Il s'agit pourtant de connaissances indispensables pour la vie quotidienne aussi bien que pour les apprentissages mathématiques. Tout doit donc être fait pour améliorer les performances des élèves.
La première condition d'une mémorisation réside dans la compréhension des opérations en jeu. L'élève est d'abord capable de calculer « quatre plus trois » parce qu'il est capable d'évoquer « quatre objets réunis avec trois objets » ou parce qu'il sait que le résultat est le nombre qui est situé « trois après quatre » sur la bande numérique, donc parce l'addition a du sens pour lui. Il n'y a pas encore mémorisation et, pourtant, c'est la première étape de la mémorisation. Certains enfants sont capables très tôt d'élaborer des résultats de façon purement mentale. D'autres ont par exemple recours à leurs doigts. Ce recours ne doit être ni encouragé ni interdit, ce qui, dans ce dernier cas, laisserait des enfants démunis face aux calculs proposés. Par contre, il n'est pas opportun, dans les moments de calcul mental, de mettre des jetons à disposition des enfants, comme aide au calcul : il n'y aurait alors plus de calcul mental !
La deuxième condition réside dans la prise de conscience de l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'un répertoire de résultats. Dans un premier temps, l'enseignant peut recenser des résultats au fur et à mesure qu'ils sont élaborés par les élèves (sans ordre déterminé), les noter sur une affiche et permettre aux élèves d'y avoir recours pour répondre à des questions, sans qu'il soit nécessaire de les reconstruire : il s'agit d'une première étape vers la mémorisation. Progressivement, ce répertoire est ensuite organisé, complété et structuré en tables.
La troisième condition réside, pour l'élève, dans la prise de conscience du fait que certains résultats sont mémorisés et qu'un répertoire mental est en train de se constituer. Pour l'addition, il est souvent limité au début à la connaissance de quelques doubles et à la prise de conscience du fait que « ajouter un » revient à dire le suivant (« je connais quatre plus un, c'est celui qui vient après quatre, c'est cinq »).
La quatrième condition réside dans la capacité à utiliser ce qu'on sait pour obtenir d'autres résultats : « quatre plus trois, c'est un de plus que trois plus trois », « six fois huit, c'est huit de plus que cinq fois huit », « quatre fois sept, c'est le double de deux fois sept ». La mise en place de points d'appui est donc une étape décisive de la mémorisation : connaissance des doubles, décompositions en appui sur le nombre cinq, complément à dix pour la table d'addition ; carrés, tables de deux et de cinq, etc., pour la multiplication.
L'utilisation de certaines propriétés des opérations permet également d'économiser la quantité de résultats à mémoriser, en particulier la commutativité (« sept fois quatre, c'est comme quatre fois sept »).
Ajoutons que, pour l'addition, à l'issue de l'apprentissage, certaines personnes n'ont mémorisé qu'une partie du répertoire et, à partir de là, reconstruisent l'autre partie, alors que d'autres ont mémorisé tous les résultats.
Pour la multiplication, une mémorisation complète s'avère, à terme, plus efficace.
La cinquième condition réside dans l'entraînement des résultats mémorisés. La mémorisation est favorisée par l'entraînement et probablement par la diversité des représentations mises en jeu. La répétition verbale rituelle des « tables », dans l'ordre croissant, engendre des risques, en particulier celui de ne pas pouvoir fournir un résultat sans réciter toute la table ou celui d'une confusion entre résultats voisins. Mieux vaut donc, s'agissant d'entraînement et de construction des « tables », ne pas procéder toujours par ordre croissant.
Les équipes de cycle ont donc à examiner soigneusement dans quelle mesure ces différentes conditions de la mémorisation sont prises en charge à l'école. Car si le travail d'entraînement est souvent assuré par les familles, l'essentiel des activités qui contribuent à une bonne mémorisation relève bien du travail scolaire, qui ne peut être limité au contrôle de ce qui doit être su.

Disponibilité des résultats

Un dernier point mérite d'être souligné. Il a déjà été dit que la récitation des tables, dans l'ordre croissant, pouvait constituer une gêne pour une mémorisation efficace. Il convient d'ajouter un autre élément essentiel. Connaître ses tables, ce n'est pas seulement être capable de dire instantanément n'importe quel résultat ; c'est aussi être capable d'exploiter rapidement cette connaissance pour donner un résultat connexe. Connaître 7 + 6, c'est être capable de répondre 13 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « Combien de 7 pour aller à 13 ? », « combien de 6 pour aller à 13 ? », « 13 – 6 ? », « 13 – 7 ? » ou encore à produire très vite, entre autres, 7 + 6 et 6 + 7 lorsque sont demandées des décompositions additives de 13. De même, connaître 7×6, c'est être capable de répondre 42 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « Quel nombre multiplié par 7 donne 42 ? », « Quel nombre multiplié par 6 donne 42 ? », « 42 divisé par 7 ? », « 42 divisé par 6 ? » ou encore à produire très vite 7×6 et 6×7 lorsque sont demandées des décompositions multiplicatives de 42.
De telles questions doivent être posées dès le départ des apprentissages.

Calcul réfléchi – diversité des procédures

Le calcul réfléchi est d'une autre nature que le calcul automatisé. Il ne s'agit plus de récupérer directement en mémoire un résultat ou une procédure directement applicable, mais d'élaborer une procédure adaptée au calcul particulier qui est proposé. Stratégie et raisonnement sont alors sollicités. D'autres représentations des nombres sont mobilisées, notamment celles qui sont liées à leur expression dans les deux systèmes de numération utilisés, numération chiffrée et numération orale. Ces deux numérations ne sont pas exactement superposables. La traduction chiffrée de « quatre-vingt-douze » ne fait intervenir ni 4, ni 20, ni 12. C'est une première raison pour laquelle il n'est pas équivalent de proposer un calcul à faire mentalement sous la forme écrite « 92 + 15 = ? » et sous la forme orale « quatre-vingt douze plus quinze ». Une autre raison relève de la mémorisation : dans le premier cas, la consigne reste visible alors que dans le second, elle doit être enregistrée, ce qui occupera une partie de la mémoire de travail.
Examinons quelques procédures qui peuvent être mises en place pour traiter deux calculs apparemment proches :

25×12
P1 : calcul séparé de 25×10 et de 25×2, puis somme des résultats partiels. **P2 :** décomposition de 12 en 4×3, et calcul de 25×4, puis de 100×3. **P3 :** utilisation du fait que 25 est le quart de 100, en divisant d'abord 12 par 4, puis en multipliant le résultat par 100 (ou multiplication de 12 par 100, puis division du résultat par 4).
25×19
P4 : calcul de 25×20 (directement ou par $25 \times 2 \times 10$), puis soustraction de 25 au résultat obtenu. **P5 :** calcul de 19×20 (par $19 \times 2 \times 10$), puis de 5×19 (nouveau calcul réfléchi qui peut être traité par la somme de 5×10 et de 5×9, par exemple), puis somme des deux résultats partiels.

Bien que 25 soit un des facteurs des deux produits, sa présence n'induit pas les mêmes stratégies de calcul et les procédures choisies dépendent des connaissances préalables des élèves à partir desquelles ils analysent les nombres en présence. Ainsi, pour utiliser P3, il faut savoir que 25 est le quart de 100, mais aussi que 12 est un multiple de 4. Pour reconnaître que P3 est difficilement applicable pour 25×19, il faut savoir que 19 n'est pas un multiple de 4…
Par ailleurs, comme cela a déjà été souligné, le calcul réfléchi suppose la mise en œuvre, souvent implicite, de diverses propriétés des opérations en jeu.
En calcul réfléchi, aucune procédure ne s'impose *a priori* et, le plus souvent, plusieurs sont possibles. Le travail en classe doit donc être axé sur l'explicitation et la confrontation des procédures possibles et efficaces (voir « Les moments de calcul mental », page suivante).
Par ailleurs, un calcul réfléchi effectué mentalement mobilise une partie de la mémoire de travail, éventuellement pour le maintien de l'énoncé (s'il est donné sous forme orale) et dans tous les cas pour la représentation des règles de calcul et la mémorisation de résultats intermédiaires. Une cause possible d'erreur de calcul provient de la « saturation » de la mémoire de travail. Ce risque de saturation peut être diminué en autorisant les élèves à noter des résultats intermédiaires ou, dans certains cas, en notant au tableau le calcul à effectuer. Mais il ne faut pas oublier que le calcul mental privilégie le traitement des nombres conçus du point de vue de la numération orale : l'énoncé oral des calculs à effectuer est donc à privilégier.
Le cas du calcul approché est encore plus délicat. Non seulement il faut choisir une procédure de calcul, mais, de plus, il faut décider de l'approximation voulue (si elle n'est pas donnée) et choisir les arrondis pour chaque nombre intervenant dans le calcul.